# АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА*

**Ф.А. Алиев[1], Н.А. Алиев[1], Н.А. Сафарова[1], Н.И. Велиева[1], Коджаева Л.И.[2]**

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Гянджинский Государственный Университет, Гянджа, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

**Резюме.** Приводится новая упрощенная аналитическая формула решения задачи Коши для однородной системы линейных дробно-производных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛДПДУПК). Входящая в эту формулу матричная экспоненциальная функция заменяется рядом Тейлора. Далее получается аналитическое выражение интеграла, с помощью которой для переходной матрицы получается соотношение, позволяющая получить решение задачи Коши с высокой точностью. Результаты распространяются и на случай неоднородных систем с постоянными возмущениями и иллюстрируются числовыми примерами.

**Ключевые слова:** задача Коши, линейная система дробно-производных, функция Миттаг-Лефлера, постоянные матричные коэффициенты

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49J35

## 1. Введение.

В работе [10] рассматривается решение СЛДПДУПК на основе функции Миттаг-Лефлера. Однако в [4-6] такое решение приводится впервые на основе экспоненциальной функции, которая с вычислительной точки зрения является более подходящей, поскольку экспоненциальную функцию можно вычислять достаточно точно [1,2,7,8,9]. При этом в это решение кроме экспоненциальной функции входит и интегральное выражение, которое составляет определенные трудности для вычисления. Поэтому если вместо экспоненциальной функции подставить ее разложение Тейлора, то можно эти интегралы получит аналитически, но погрешности решения зависят от выбранного числа слагаемого из приведенного ряда.

В данной работе получаются аналитические формулы решения, которые в отличие от [5,6] содержат только одно интегральное выражение, позволяющее также проще получить решение СЛДПЛДУПК. Далее подставляя разложение экспоненциальной функции на под интегральное выражение, получается численно-аналитическая формула решения в виде ряда Тейлора. Результаты иллюстрируются числовым примером и приводится сравнительный анализ с результатами [10].

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 09.10.2018

**2. Упрощенная формула решения задачи Коши.**

Как известно [5,6], для решения задачи Коши СЛДПДУПК

$$D^{\alpha}x(t)=Ax(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t>t_0>0, \tag{1}$$

имеется следующая аналитическая формула

$$x(t)=\left\{\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\left[E\frac{t_0^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}+A^{\frac{2q+1}{2p+1}}\int_0^{t_0}\frac{(t_0-\tau)^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}e^{\tau A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau\right]+\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\left[E\frac{t^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}+A^{\frac{2q+1}{2p+1}}\int_0^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}e^{\tau A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau\right]+\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right\}x(t_0), \tag{2}$$

где $A$- квадратная матрица размерности $n\times n$, $x(t)$-вектор состояний размерности $n$, $x(t_0)$-начальный вектор, $\alpha\in(0,1)$ и $\alpha=\frac{2p+1}{2q+1}$, здесь $p$ и $q$ натуральные числа, $E$ -единичная матрица размерности $n\times n$.

Как показано в [4] любое вещественное число можно приближать с любой точностью к рациональным числам, а любое рациональное число с числами отношение двух нечетных чисел.

Для упрощения формул (2) используем соотношение [12]

$$D_{x_0}^{\alpha}u(\xi)=\frac{u(x_0)\xi^{-\alpha}}{(-\alpha)!}+\int_{x_0}^{\xi}\frac{(\xi-t)^{-\alpha}}{(-\alpha)!}u'(t)dt, \tag{3}$$

которое определяет производные $u(x)$ с порядком $\alpha$. Используя выражение (3) в (2), после несложных преобразований [4-6] соотношения (2) приводим к виду

$$x(t)=\left[e^{t_0A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}e^{t_0A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{A^{\frac{2q+1}{2p+1}}\tau}d\tau\right]x_0=$$

$$=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{A^{\frac{2q+1}{2p+1}}(\tau-t_0)}d\tau\right]x_0 \tag{4}$$

Отметим, что в формуле (4) подынтегральная функция содержит слабую особенность, поскольку $\frac{s-2q}{2q+1}<1,$ а это позволяет исчезновение такой особенности после интегрирования.
Таким образом, имеет место следующее утверждение:
**Теорема 1.** Пусть имеется задача Коши (1), где коэффициенты $A$-постоянные матрицы. Тогда ее решение представляется в виде (4).

Отметим, что формула (4) в классическом случае, т.е. при $\alpha=1$ совпадает с известными [9]. Действительно в данном случае $p=0,\ q=0$ и

$$x(t)=e^{-At_0}\left[e^{At_0}+A\int_{t_0}^{t}e^{A\tau}d\tau\right]x_0=\left[E+e^{-At_0}\left(e^{At}-e^{At_0}\right)\right]x_0=e^{A(t-t_0)}x_0. \qquad (4')$$

**3. Метод вычислений**

Подынтегральное выражение в (4) такое, что ее интегрирование как аналитическим, так и численным путем сталкивается с серьезными трудностями. Во избежание этого разложим входящее в подынтегральное выражение экспоненциальную функцию $e^{A^{\frac{2q+1}{2p+1}}(\tau-t_0)}$ из (4) в окрестности $\tau=t$ в ряд Тейлора

$$e^{A^{\frac{2q+1}{2p+1}}(\tau-t_0)}=\sum_{k=0}^{\infty}A^{k\frac{2q+1}{2p+1}}e^{(t-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\frac{(\tau-t)^k}{k!}. \qquad (5)$$

Подставляя ряд (5) в (4) получим

$$x(t)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}}{k!}e^{(t-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{k+\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}d\tau]x_0 \qquad (6)$$

После интегрирования степенной функции в (6) окончательно для решения задачи Коши (1) имеем

$$x(t)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}e^{(t-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(t-t_0)^{k+\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!\left(k+\frac{s+1}{2q+1}\right)}\right]x_0 \qquad (7)$$

В (7) конечную сумму обозначим через $x_r(t)$ , т.е.

$$x_r(t)=\left[\sum_{s=0}^{2q} A^{\frac{s}{2p+1}} \frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1} \sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}} \frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}-\frac{e^{(t-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}\frac{(t-t_0)^{k+\frac{s+1}{2q+1}}}{\left(k+\frac{s+1}{2q+1}\right)}\right]x_0, \quad r\in N, \tag{8}$$

где при $r\to\infty$ приближенное решение $x_r(t)\to x(t)$. Для вычисления решения (8) поступим следующим образом. Принимаем любое число $r=l$. Вычисляем $x_l(t)$ и $x_{l+1}(t)$, ( $l=1,2,....$) . Если

$$\left\|x_l(t)-x_{l-1}(t)\right\|>\left\|x_{l+1}(t)-x_l(t)\right\|, \tag{9}$$

то процесс вычисления продолжается, иначе процесс вычисления останавливается и за решением принимается $x(t)=x_l(t)$, где $\|\cdot\|$ является нормой соответствующей функции.

Таким образом, мы имеем следующий

**Алгоритм 1.**

1.Задаются матрица $A$ и начальное условие $x_0$ из (1).

2. При $r=1,\,2,\,3$ по формуле (8) вычисляются $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, т.е. $l=3$.

3.Проверяется условие $\left\|x_l(t)-x_{l-1}(t)\right\|<\left\|x_{l+1}(t)-x_l(t)\right\|$.

Если оно удовлетворяется, процесс вычисления прекращается и за решение принимается $x_l(t)$. Иначе переход к шагу 4.

4. Принимается $l=l+1$, вычисляется $x_l(t)$ по (8) и переход к шагу 3.

Проиллюстрируем результаты на следующем примере из [1].

**Пример 1.**

Рассматривается скалярный случай , т.е. в уравнении (1) $A=-1$; начальное условие $x_0=1$. Вычисление проводится на отрезке [4,6,10]. Шаг интервала $h=0.4$, т.е. отрезок разбит на 5 точек. При различных значениях $\alpha$ вычислен $x_r(t)$ по формуле (8). Согласно формуле (3,117), приведенного в [11] , вычислен $x_M(t)$. В таблице 1 приведено сравнение этих значении

Таблица1

| $\alpha$ | $\left\|x_r(t)-x_M(t)\right\|$ | Шаг итерации r | Шаг итерации м |
|---|---|---|---|
| 1/3 | 0.314 | 23 | 7 |
| 1/5 | 0.237 | 23 | 11 |
| 5/7 | 0.4248 | 37 | 4 |
| 1/7 | 0.1707 | 37 | 15 |
| 3/7 | 0.262 | 27 | 5 |

где шагом итерации является выполнение условия (9).
При $\alpha = 1$ вычисляется $x_r(t)$ по формуле (8) , где удовлетворяется условие

$$\left\| x_{37}(t) - x_{36}(t) \right\| < \left\| x_{38}(t) - x_{r37}(t) \right\|$$

и за решением принимаем $x_{37}(t)$.

Для данного случая вычисляется аналитическое решение $x_A(t)$ по формуле (4). Сравнивая полученные результаты , имеем:

$\left\| x_{37}(t) - x_A(t) \right\| = 1.149129 * 10^{-17}$.

Отметим ,что как отмечено в [9] формула (3.117) для $\alpha = 1$ не верно.

**Пример 2.** Рассмотрим пример1 из [10], т.е.

$D_1^{2\alpha} x + x = 0$,

где с помощью соответствующих преобразований последнею уравнению запишем в следующим виде

$$D^{\alpha} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9*}$$

Принимаем отрезок [1 3] и начальную условию примем $x(1) = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

Решение уравнение (9*) в [1] представлена в следующим виде

$$X\ (t) - e_{\alpha}^{Ax} c = \begin{bmatrix} \cos_{\alpha}(t) & \sin_{\alpha}(t) \\ -\sin_{\alpha}(t) & \cos_{\alpha}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. С этими исходными данными сначала используя начальное условие вычисляется

$$z_1^p(t) = \cos_{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{t^{(2j+1)\alpha - 1}}{\Gamma(2j+1)\alpha};$$

$$z_2^p(t) = \sin_{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \frac{t^{(2j+2)\alpha - 1}}{\Gamma(2j+2)\alpha}; \quad p = 1, 2, \cdots k+1$$

При удовлетворение условие

$$\left\| z_1^k(t) - z_1^{k-1}(t) \right\| < \left\| z_1^{k+1}(t) - z_1^k(t) \right\| \quad \text{и} \quad \left\| z_2^k(t) - z_2^{k-1}(t) \right\| < \left\| z_2^{k+1}(t) - z_2^k(t) \right\|$$

тогда принимаем $z_1^p(t) = z_1^k(t);\ z_2^p(t) = z_2^k(t)$.

Решая систему алгебраических уравнение

$$\begin{bmatrix} z_1^k(1) & z_2^k(1) \\ -z_2^k(1) & z_1^k(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \text{ находим } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4294 \\ 1.4451 \end{bmatrix}.$$

Далее отрезке [1 3] разбит на 5 точек, где для каждой точек находим значения

$$X(t_i) = \begin{bmatrix} \cos_\alpha(t_i) & \sin_\alpha(t_i) \\ -\sin_\alpha(t_i) & \cos_\alpha(t_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{где } t_i = t(0) + ih;\ h = 0.4\ i = 1, 2,$$

При различных значениях $\alpha$ с этими исходными данными вычислен $x_r(t)$ по формуле (8) и по формуле (3.117) приведенного в [11] $x_M(t)$. В таблице 2 приведено сравнение этих значений.

Таблица2

| $\alpha$ | $\lVert x_r(t) - x_M(t) \rVert$ | $\lVert X(t_i) - x_M(t) \rVert$ r | $\lVert x_r(t) - X(t_i) \rVert$ |
|---|---|---|---|
| 1/3 | 0.241 | 1.54 | 1.47 |
| 1/5 | 0.312 | 1.722 | 1.68 |
| 1/7 | 0.213 | 1.562 | 1.611 |

## 4. Решение задачи Коши (1) с постоянными возмущениями.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + B(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

где $B(x)$ - вектор размерности $n$.

Как известно [10], решение задачи Коши (10) имеет вид†

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^{(k+1)\alpha-1}}{\left[(k+1)\alpha-1\right]!} x_0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-\xi)^{(k+1)\alpha-1}}{\left[(k+1)\alpha-1\right]!} B(\xi)\, d\xi \tag{11}$$

В случае, когда $B(x) = B$ постоянный вектор, легко показать, что в (11) интеграл вычисляется и имеем следующую аналитическую формулу

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^{(k+1)\alpha-1}}{[(k+1)\alpha-1]!} x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^{(k+1)\alpha}}{[(k+1)\alpha]!} B \tag{12}$$

Функция (12) является решением задачи Коши (10) с помощью функции Миттага-Лефлера. Теперь с помощью выражений (4) преобразуем функции (12) через экспоненциальную функцию в следующем виде

† Соотношение (11) при $t = t_0$ имеет особенности, которые превращаются в бесконечность [10]

$$x(t)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\left\{\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{(\tau-t_0)\cdot A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau\right]x_0+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{s=0}^{2q}\left(A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{\eta^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int_{t_0}^{\eta}\frac{(\eta-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{(\tau-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau\right)d\eta\right]B\right\} \tag{13}$$

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.** Пусть в задаче Коши (10) $B(x)=B$ постоянная матрица. Тогда решение соответствующей задачи Коши представляется в виде (13).

Замечание 1. Отметим, что при $p=0,\ q=0$ ( т.е. $\alpha=1$) из (13) имеем

$$\begin{aligned}x(t)&=\left\{\left[E+A\int_{t_0}^{t}e^{(\tau-t_0)A}d\tau\right]x_0+\int_{t_0}^{t}\left[E+A\int_{t_0}^{\eta}e^{(\tau-t_0)A}d\tau\right]d\eta\cdot B\right\}=\\&=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(\eta-t_0)}d\eta\cdot B=e^{A(t-t_0)}x_0+A^{-1}\left(e^{A(t-t_0)}-E\right)\cdot B,\end{aligned} \tag{14}$$

которое совпадает с классическим решением (при $\alpha=1$) из [9,14,15].

Отметим, что в (13) аналогично п.3 используясь разложением $e^{(\tau-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}$ в окрестной точке $\tau=\eta$ в ряд Тейлора (5) имеем (первое слагаемое перед начальным данным $x_0$, уже преобразован в п.3, поэтому здесь рассматривается только последнее интегральное слагаемое)

$$J_1=\int_{t_0}^{t}A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}d\eta\int_{t_0}^{\eta}\frac{(\eta-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{(\tau-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\left(\int_{t_0}^{\eta}\frac{(\eta-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\sum_{k=0}^{\infty}A^{k\frac{2q+1}{2p+1}}e^{(\eta-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\frac{(\tau-\eta)^k}{k!}d\tau\right)d\eta=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^{\frac{(k+1)(2q+1)+s}{2p+1}}\int_{t_0}^{t}e^{(\eta-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\eta\int_{t_0}^{\eta}\frac{(\eta-\tau)^{k+\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!k!}d(\eta-\tau)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{A^{\frac{(k+1)(2q+1)+s}{2p+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!k!}\int_{t_0}^{t}e^{(\eta-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\frac{(\eta-t_0)^{k+\frac{s+1}{2q+1}}}{k+\frac{s+1}{2q+1}}d\eta \cdot \qquad (15)$$

Теперь разлагая выражение $e^{(\eta-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}$ на ряд Маклорена в виде

$$e^{(\eta-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[(\eta-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}\right]^l}{l!} \qquad (16)$$

и подставляя (16) в (15) имеем

$$J_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{A^{(k+1)(2q+1)+s}}{\frac{s-2q}{2q+1}!k!\left(k+\frac{s+1}{2q+1}\right)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^{l\frac{2q+1}{2p+1}}}{l!}\frac{(t-t_0)^{l+k+\frac{s+1}{2q+1}+1}}{l+k+\frac{s+1}{2q+1}+1} \cdot \qquad (17)$$

Учитывая (17) в последнем интеграле (13) имеем

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{\eta^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int_{t_0}^{\eta}\frac{(\eta-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{(\tau-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau\right]d\eta\cdot B=$$

$$=\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\left\{\left[\frac{t^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}-\frac{t_0^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}\right]+J_1\right\}B \qquad (18)$$

Учитывая (7) и (18) в (13) получим следующее выражение для вычисления решения задачи Коши (10)

$$x(t)=\left(\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right)^{-1}\left\{\sum_{s=0}^{2q}\left(A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}--\frac{e^{(t-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}\cdot\frac{(t-t_0)^{k+\frac{s+1}{2q+1}}}{k+\frac{s+1}{2q+1}}\right)x_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{A^{(k+1)(2q+1)+s}}{\frac{s-2q}{2q+1}!\cdot k!\cdot\left(k+\frac{s+1}{2q+1}\right)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^{l\frac{2q+1}{2p+1}}}{l!}\frac{(t-t_0)^{l+k+\frac{s+1}{2q+1}+1}}{\left(l+k+1+\frac{s+1}{2q+1}\right)}\right)+\left(\frac{t^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}-\frac{t_0^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\frac{s+1}{2q+1}!}\right)\right]B\right\} \qquad (19)$$

В (19) бесконечные суммы заменим с $r+1$ слагаемыми, полученные выражения обозначим через $x_r(t)$. При этом, как в п.3 , если

$$\|x_r(t)-x_{r-1}(t)\|>\|x_{r+1}(t)-x_r(t)\|, \qquad (20)$$

то продолжим процесс вычислений, иначе вычисления останавливаются и за решение принимается $x(t) = x_r(t)$.

Итак имеется следующий вычислительный алгоритм:

**Алгоритм 2.**

1. Из (10) формируются матрицы $A$, вектор возмущений $B$ и начальное данное $x_0$.
2. Вычисляются $A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}$ (при разных значениях $k$ и $s$ получаются все степени множителя $A$ из (19)), $t^{k+\frac{s+1}{2q+1}}$ (при разных значениях $k$, $s$ и $q$ получаются все возможные степени $t_0, (t-t_0), t$), $\frac{s-2q}{2q+1}, k, l+k+1+\frac{s+1}{2q+1}, e^{(t-t_0)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}$.
3. Вычисляются $x_r(t)$ из (19) (вместо бесконечной суммы из (19) берутся r+1 слагаемые).
4. Проверяется условие (20), если оно удовлетворяется, процесс вычисления продолжается, иначе процесс вычисления останавливается и за решение принимается $x_r(t)$.

**Пример.** В данной работе показывается приведенное решение (64) для начальной задачи (53) из [10] является не верным.

Действительно в [10] показывается , что решение начальной задачи

$$\begin{aligned} &y'' + 3D^{3/2}y + y = 8 \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ \ t \in (0,1) \end{aligned} \tag{21}$$

имеет вид (в [10] это пронумеровано (64)).

$$\begin{aligned} y(t) = 10^{-2}\,\mathrm{Re}[(-4.8 + 1.4i)E_{3/2}(\lambda_1 t^{3/2}) + (0.9 - 7.4i)E_{3/2}(\lambda_2 t^{3/2}) + \\ + 0.348E_{3/2}(\lambda_3 t^{3/2}) - 0.59E_{3/2}(\lambda_4 t^{3/2})] \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\lambda_1 = 0.363 - 0.556i,\ \ \lambda_2 = 0.363 + 0.556i,$$

$$\lambda_3 = -2.962,\ \ \lambda_4 = -0.765$$

и

$$E_{3/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k + 1\right)} \tag{23}$$

является функциейМиттага–Лефлера.

Учитывая (23) в выражении решения (22) и подставляя последнее в уравнение (21), получим наименьшую степень переменной $x$ соответствующего ряда, которая равна $x^{-3/2}$, а для его коэффициента получим следующее выражения

$$\left[\frac{3\cdot 10^{-2}}{-2\sqrt{\pi}}(-4.8+0.9+0.348-0.59)\right]x^{-3/2}+......\equiv 0 \tag{24}$$

Поскольку полученные выражения тождественно должны равняться нулю, то каждое выражение перед степенью $x^n$ тоже должно равняться нулю. Выражение в скобке (24) приравнивается к -4.142.

А это подтверждает, что (64) из [10] не является решением уравнения (21).

**Заключение.**

В данной работе приводится решение задачи Коши для однородных и неоднородных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными матричными коэффициентами и возмущениями. Показывается, что в отличие от известных [10], данный подход опирается на экспоненциальную функцию, полученных из функции Миттага-Лефлера. В отличие от существующих результатов [10,11], данный метод лучше реализуется на компьютере и дает более точные результаты.

**Литература**


1. Aliev F A, Larin V. B. Generalized Lyapuniv equation and factorization of polynomial matrices ,12-th World Congress IFAC ,Sydney, Australia 1993,T.5, pp.157-159
2. Aliev F A, Larin V. B. On the computation of balancing transformations for a linear controllable system, Electric.,1993, T.1,N3, pp.182-191
3. Aliev F.A. and Larin V.B. Optimization of linear control systems, Gordon Breach, Amsterdam, 1998, 272 p.
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G. Transformation Mittag-Leffler function to an exponential function and its some applications to problems with a fractional derivative. Arxiv preprint, arxiv 1804,02928.
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math.Vol.17, No.3
6. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., VelievaN.I. Solving the linear fractional derivatives ordinary differential equations with constant matrix coefficients. Arxiv preprint, arxiv 1805,06700.

7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Comments on “A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers”, Systems & Control Letters ,1990,14 (5), 453
8. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Discrete generalized algebraic Riccati equations and polynomial matrix factorization Systems & control letters 1992,18 (1), pp.49-59
9. Andreev Yu.I. Control of finite-dimensional linear objects. M., Nauka, 1976.
10. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. Appl.Math. Comput.Vol.187, 2007, pp.68-78.
11. Monje C.A.,Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Felue V. Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications.Springer,London, 2010, 414 p.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, Switzerland,1993,780 p.
13. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mammadova G.M., Aliev F.A. Some remarks on the paper, entitled “Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions” by Tomovski Z., Hiffer and Srivastava H.M. TWMS J. of Pure and Applied Mathematics, 2017, V.8, N.1, pp.112-114.
14. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Элм, Баку, 1989, 320 с.
15. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. Киев, Наукова Думка, 1980,167 с.

## ALGORITHM FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR STATIONARY SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER LINEAR ORDIN ARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

**F.A. Aliev[1], N.A. Aliev[1], N.A. Safarova[1],**
**N.I. Velieva[1] , L.I. Godjaeva[2]**

[1] Institute Applied of Mathematics, BSU,Baku, Azerbaijan
[2] Ganja State University, Ganja, Azerbaijan
e-mail: f_aliev@yahoo.com

### ABSTRACT

A new simplified analytical formula is given for solving the Cauchy problem for a homogeneous system of fractional order linear differential equations with constant coefficients (SFOlDECC). The matrix exponential function in this formula is replaced by a Taylor series. Next, an analytical expression of the integral is obtained, with the help of which, for the transition matrix, a relation is obtained that allows one to obtain a solution of the Cauchy problem with high accuracy. The results also apply to the case of inhomogeneous systems with constant perturbations and are illustrated by numerical examples.

**Keywords:** Cauchy problem, linear fractional derivative system, Mittag-Leffler function, constant matrix coefficients

## References

1. Aliev F A, Larin V. B. Generalized Lyapuniv equation and factorization of polynomial matrices ,12-th World Congress IFAC ,Sydney, Australia 1993,T.5, pp.157-159
2. Aliev F A, Larin V. B. On the computation of balancing transformations for a linear controllable system, Electric.,1993, T.1,N3, pp.182-191
3. Aliev F.A. and Larin V.B. Optimization of linear control systems, Gordon Breach, Amsterdam, 1998, 272 p.
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G. Transformation Mittag-Leffler function to an exponential function and its some applications to problems with a fractional derivative. Arxiv preprint, arxiv 1804,02928.
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math.Vol.17, No.3
6. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., VelievaN.I. Solving the linear fractional derivatives ordinary differential equations with constant matrix coefficients. Arxiv preprint, arxiv 1805,06700.
7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Comments on “A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers”, Systems & Control Letters ,1990,14 (5), 453
8. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Discrete generalized algebraic Riccati equations and polynomial matrix factorization Systems & control letters 1992,18 (1), pp.49-59
9. Andreev Yu.I. Control of finite-dimensional linear objects. M., Nauka, 1976.
10. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. Appl.Math. Comput.Vol.187, 2007, pp.68-78.
11. Monje C.A.,Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Felue V. Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications.Springer,London, 2010, 414 p.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, Switzerland,1993,780 p.
13. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mammadova G.M., Aliev F.A. Some remarks on the paper, entitled “Fractional and operational calculus with generalized

fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions" by Tomovski Z., Hiffer and Srivastava H.M. TWMS J. of Pure and Applied Mathematics, 2017, V.8, N.1, pp.112-114.

14. Aliev F.A. Metodi resheniye prikladnix zadach optimizasii dinamicheskix system, Elm, Baku, 1989, 320 s. (Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimizing dynamic systems Elm, Baku, 1989, 320 p) (in Russian)
15. Larin V.B. Upravleniye shaqayushimi apparatami. Kiev, Naukovo Dumka, 1980,167 p.(Larin V.B. Managing walking machines. Kiev, Naukova Dumka, 1980, p.167 ) (in Russian)